matematicalia
revista digital de divulgación matemática

ECONOMÍA

Volumen 7, núm. 2 (junio 2011)
12 páginas

http://www.matematicalia.net
ISSN: 1699-7700

Recibido: 11 de enero de 2011
Publicado: 25 de julio de 2011

La doble hélice de las ciencias sociales

José-Manuel Rey
Departamento de Análisis Económico
Universidad Complutense de Madrid
e-mail: j-man@ccee.ucm.es
página web: http://grupoecofractal.com/es/miembros/jmrey

Resumen

> *"La teoría de juegos, con el equilibrio de Nash como su pieza central, sobresale como la teoría unificadora de la ciencia social"*
>
> C.A. HOLT, A.E. ROTH: *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 101, no. 12 (2004), 3999-4002.
>
> *"Todo el edificio de la teoría de juegos reposa sobre dos teoremas: el Teorema del Minimax de Von Neumann de 1928 y el Teorema del Equilibrio de Nash de 1950."*
>
> J. EATWELL, M. MURRAY, P. NEWMAN (eds.): *The New Palgrave: Game Theory.* WW Norton, 1989.

1. El juego del bar y las situaciones sociales

Un grupo de amigos se encuentra en un bar la noche del sábado. Otro grupo similar de amigas entra en el local, llamando la atención de los chicos. Entre las chicas destaca una rubia platino que a todos les resulta especialmente atractiva. Movidos por instintos presumiblemente biológicos, cada chico se plantea independientemente el dilema de si acercarse a hablar con la rubia –consciente de que podría tener que competir con otros y, como resultado, terminar solo en la barra– o dirigirse a charlar con una de las otras chicas –todas morenas– sin competencia y, por tanto, con éxito dialéctico asegurado.

Una versión de esa situación –sin duda estereotipada– ocurre, además de en bares y sábados innumerables, en una escena de la premiada película *Una mente maravillosa* (*A beautiful mind*), dirigida por Ron Howard en 2001 y protagonizada por Russell Crowe en el papel del matemático americano John Nash. La escena pretende ilustrar el momento clave de inspiración en que Nash descubre la idea central de su tesis doctoral, presentada en Princeton en 1950, y que estableció el resultado fundamental para la solución de situaciones sociales como la descrita arriba.

La situación del bar propone un dilema de interacción psicológica social. Cada chico debe adoptar una estrategia –acercarse a la rubia o a una morena– fuertemente condicionado por las decisiones de los otros, y sabiendo que los demás se enfrentan al mismo dilema. La característica básica del problema es la *interdependencia estratégica*: para cada individuo, el resultado depende no sólo de su decisión sino de la de los demás, que además desconoce en el momento de tomar la suya propia.

El problema del bar puede parecer anecdótico, pero bien mirado sirve de metáfora para una cuestión de mucha más enjundia: si "hablar con la rubia" se contempla como un recurso escaso, se trata de estudiar cómo se asigna ese recurso entre diferentes rivales y, eventualmente, cómo de eficiente es esa asignación. Resulta que esa es la definición estándar para el objeto de la ciencia económica[1].

La vida en sociedad plantea incontables problemas de interdependencia estratégica como el del juego del cortejo en el bar. Pocas decisiones, personales o profesionales, se toman cotidianamente sin que afecten a otros. En realidad todas lo hacen, excepto aquellas en que la interacción es nula, como la de un individuo a solas que decide si empezar a leer el periódico por la primera o la última página. Existen otras situaciones en que hay interacción, pero es tan débil que se puede desconsiderar. Por ejemplo, la decisión de una familia de salir o no de viaje de una gran ciudad un viernes de puente –considerando el probable atasco– no dependerá de la correspondiente decisión de sus vecinos. En esos casos de interacción débil, los problemas de decisión se simplifican.

2. Comités humanos y planetarios

Es natural preguntarse si las matemáticas pueden arrojar alguna luz sobre el tipo de situaciones sociales descrito. En el caso del cortejo en el bar, ¿se puede recomendar fundamentadamente a cada chico qué estrategia seguir? ¿Cuál es la predicción sólida del resultado de las decisiones de todos? ¿Es ese resultado satisfactorio para el grupo?

Desde la revolución newtoniana del siglo XVII las matemáticas han demostrado una capacidad asombrosa para describir el mundo natural[2]. Así, resulta lógico que los primeros intentos sistemáticos, alrededor de la mitad del siglo XIX, de matematizar la economía –la "física" de las ciencias sociales– estuvieran alentados tanto por los resultados como por los métodos de la ingeniería y la física[3]. Esos intentos no fructificaron –considerados por una parte de la comunidad económica una corriente sectaria más– quizá debido a la resistencia usual a nuevas ideas diferentes del pensamiento establecido. Como trasfondo, sin embargo, está la tradicional notable dificultad de las matemáticas para explicar los fenómenos sociales. El matemático húngaro John Kemeny (1969) –ayudante de Einstein en Princeton– da razón contundente de ello:

> *"La verdadera dificultad para aplicar las matemáticas está en el hecho de que las ciencias sociales son más complejas que las ciencias físicas. El comportamiento de un comité de seres humanos es inmensamente más complejo que el de las órbitas del sistema planetario."*

[1] Ver, por ejemplo, P.A. Samuelson, W.D. Norhdaus: *Economía (*17ª ed.*)*, McGraw Hill, 2002. También la definición más amplia del objeto de la economía moderna –el análisis de los incentivos en todas las instituciones sociales– comprende la situación del bar, como quedará claro más adelante.

[2] Según Bertrand Russell, *"casi todo lo que distingue al mundo moderno de los siglos anteriores es atribuible a la ciencia, que alcanzó su triunfo más espectacular en el siglo XVII"*. Ese triunfo es producto, en particular, del cálculo diferencial, que permitió a Newton describir el sistema del mundo con precisión exquisita.

[3] Lo que se conoce como la "revolución marginalista" –cuyo precursor fue el matemático francés Augustin Cournot *c.*1838– encabezada por William Jevons en Inglaterra, Karl Menger en Austria y Leon Walras en Suiza, que promovieron el uso del cálculo diferencial para el análisis económico. Hay muchas analogías entre los métodos clásicos de la economía matemática y las leyes de la mecánica, la termodinámica y áreas científicas similares [6].

Eso explica tanto el desarrollo tardío de las ciencias sociales como la dificultad de emplear los métodos de las matemáticas. Es un logro de la ciencia del siglo XX –imponente, a la vista de lo anterior– haber establecido la matemática como herramienta de análisis indispensable para las ciencias sociales. Es decir, que el universo de la "escritura" que mencionaba Galileo es mucho más amplio que el natural[4]: comprende también al universo generado por la actividad humana a cualquier escala. Una razón para ello fue el desembarco sin precedentes de excelentes científicos e ingenieros en el mundo de la economía a principios del siglo XX[5].

Pero la explicación fundamental de la matematización definitiva de las ciencias sociales es la aparición –cerca de 1930– de la *teoría de juegos* creada por el genial John von Neumann, que proporciona una teoría matemática de las interacciones sociales. El libro *Theory of Games and Economic Behaviour* de von Neumann y el economista Oskar Morgenstern, publicado en 1944, constituye un hito sensacional en el mundo de la teoría económica[6]. En el libro se formula un modelo general para las situaciones de interacción estratégica. Éstas reciben el nombre de "juegos", abstrayendo las características que comparten con los juegos de mesa, como el póquer, que interesaba particularmente a von Neumann[7]. La pieza que declaradamente perseguían era una teoría matemática de la ciencia social basada en la psicología individual, al modo en que el cálculo diferencial de Newton había establecido una matematización de la física.

3. El minibar de von Neumann[8]

La situación del bar es un juego en el sentido de la teoría de von Neumann. Los *jugadores* son los chicos, cada uno con dos *estrategias*: ir a por la rubia (R) o ir a por una morena (M). Es un juego de movimientos simultáneos: los jugadores eligen su estrategia independientemente, esto es, sin saber qué eligen los demás. El resultado del juego depende del vector de estrategias de todos los jugadores, que se denomina *perfil* del juego. Así, el resultado del perfil "todos M" es que todos consiguen charlar con una morena, puesto que hay una para cada chico, mientras que "uno R; el resto M" implica que uno charla con la rubia y el resto con morenas. Además, el perfil "más de uno R; el resto M" supone que los que eligen M consiguen charlar con una morena, pero los que eligen R no charlarán con ninguna: no consiguen conversar con la rubia porque –al ser más de uno– se estorbarán, y tampoco charlarán con una morena porque éstas les rechazarán al verse como "segundo plato"[9].

Para poder avanzar con un análisis lógico del problema es necesario suponer un principio general de actuación de los jugadores. De otro modo, la solución debería buscarse en las evidencias más o menos experimentales de la psicología social. Esa hipótesis crucial es la *conducta racional*, que

[4] En alusión a su famosa frase de que *"el universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas"*. Se refería al universo natural.

[5] Según Mirowski [11], *"la lista es asombrosa e incluye a Ragnar Frisch, Tjalling Koopmans, Jan Tinbergen, Maurice Allais, Kenneth Arrow y muchos otros. Por primera vez, notables matemáticos, como John von Neumann, Griffith Evans, Harold Davis, Edwin Wilson y otros fueron inducidos a volver su atención, aunque brevemente, a la economía y a participar en su elaboración en lugar de burlarse desde los márgenes. Cuando la afluencia de talento se familiarizó con el cuerpo de la teoría neoclásica, […] estos monstruos pudieron introducirse y aplicar más técnicas y metáforas matemáticas de última hora al programa neoclásico y salir con resultados de largo alcance."*

[6] Según el matemático y Premio Nobel de economía Kenneth Arrow, *"la importancia del libro de von Neumann y Morgenstern se reconoció de inmediato […] artículos reseñando el texto no dejaban lugar a dudas de que estaban tratando con un evento intelectual de primera magnitud que cambiaría el curso del pensamiento económico."*

[7] Se considera en la literatura que la primera especificación rigurosa de juego y sus estrategias es del matemático francés Emile Borel entre 1921 y 1927.

[8] Según Halmos [3], *"las fiestas en casa de von Neumann eran frecuentes, famosas y largas. Johnny no era un gran bebedor pero distaba mucho de ser abstemio"*. Dado su notable sentido del humor [15], a von Neumann probablemente no le hubiera disgustado este juego de palabras con el nombre de su famoso teorema, el lugar que guardaba los licores en su casa, y el juego del bar de este artículo.

[9] La interpretación de los posibles resultados del juego y las preferencias de los chicos sobre los resultados están extraídos de la escena de la película *A beautiful mind* (R Howard, 2001).

supone que los jugadores son capaces de ordenar los resultados del juego según sus preferencias –sin circularidades– y que eligen su opción preferida entre las disponibles.

La racionalidad no basta para obtener una predicción lógica del juego del bar. Cada jugador se da cuenta de que su resultado favorito – "yo R; el resto M"– no sólo depende de las estrategias de los demás, sino que está en conflicto puro con los de ellos. Si cada uno piensa en elegir M por evitar el peor resultado –monologar en la barra–, se obtiene "todos M" que es sub-óptimo para cualquiera. Si entonces cada uno considera cambiar a R pensando en obtener su perfil óptimo se produce "todos R", que es el peor resultado para todos. Así, si cada uno contempla asegurarse y cambiar a M, se vuelve al perfil sub-óptimo… Ese bucle perverso de razonamientos es característico de los juegos de estrategia y resultó un obstáculo formidable para el avance de la teoría de juegos en sus inicios.

Von Neumann consiguió deshacer el bucle para una clase de juegos con dos jugadores, los *estrictamente competitivos*, en los que lo que pierde un jugador lo gana el otro. Entre ellos, por ejemplo, están los juegos de pierde-gana, incluyendo los que permiten el empate, como el ajedrez o las damas. El teorema minimax –obtenido por von Neumann en 1928– es una pieza clave de la teoría de juegos. Establece inequívocamente la forma óptima de jugar esos juegos. Parece sorprendente *a priori* que la resolución del dilema del bucle se consigue mezclando estrategias a través de mecanismos de decisión aleatorios, que se denominan *estrategias mixtas*[10]. Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad en el espacio de estrategias. En el caso del bar, una estrategia mixta consiste en lanzar una moneda al aire con probabilidad p de cara y jugar R si sale cara y M si sale cruz. El resultado de von Neumann demuestra que existen valores adecuados para las p's que minimizan los daños mutuos que se pueden infringir los oponentes. Las estrategias correspondientes se llaman *minimax*. Como subproducto necesario para desarrollar esa idea, von Neumann construyó una teoría de valoración de estrategias mixtas: la teoría de la *utilidad esperada*, que ha proporcionado el paradigma fundamental en el análisis de la toma de decisiones desde *c.*1950. Consiste en valorar los perfiles formados por estrategias mixtas como media ponderada –por las probabilidades que forman las mezclas de estrategias– de las valoraciones (numéricas) de los perfiles de estrategias convencionales.

La solución de von Neumann puede ilustrarse con la siguiente historia que, al parecer, representa un hito –cuando menos mediático– en la historia moderna de España.

4. Disparar a lo von Neumann

Un momento crucial en el camino de la selección española hacia el título de campeona del mundo de fútbol en Sudáfrica 2010 fue el del penalti que el portero Casillas le paró a Cardozo, jugador de Paraguay, en el partido de cuartos de final con empate a cero en el marcador. Visto el empaque defensivo de la selección sudamericana, remontarle un gol hubiera sido aún más difícil que contra Suiza que, como se sabe, no fue[11].

Parece haber quedado para los anales que Paraguay no marcó porque Reina –el portero suplente de España– advirtió a Casillas del lugar por el que lanzaría Cardozo la pena máxima[12]. Resulta que en un partido de la última temporada, Cardozo le ganó dos penaltis a Reina por la izquierda del portero. Es indudable que Casillas demostró una gran habilidad al intuir el lado y detener el lanzamiento. No resulta tan convincente atribuir el acierto al informe de Reina.

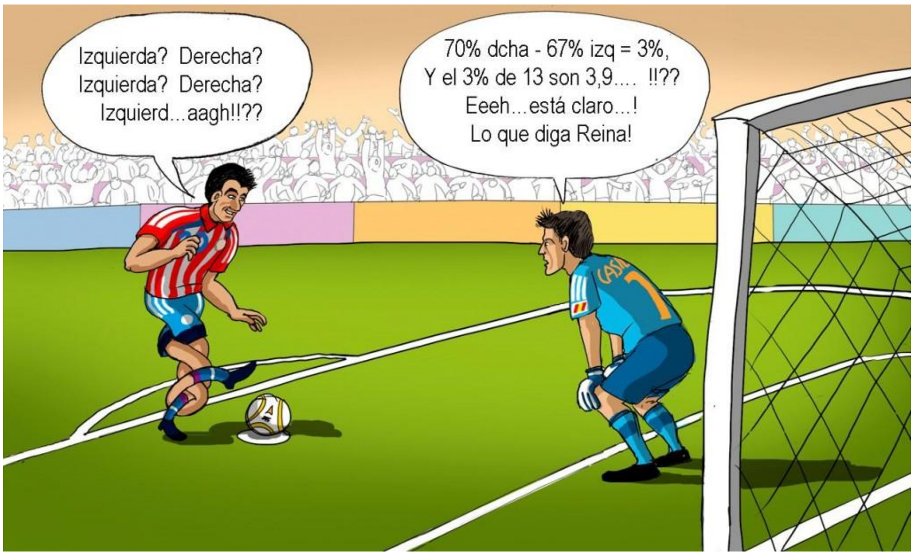
La razón es sencilla: si Cardozo no es un mediocre lanzador de penaltis, no disparará siempre por el mismo lado, sino que alternará los dos. Puede ser buenísimo ajustando el balón al palo izquierdo –su

[10] Que el dilema pudiera resolverse mediante estrategias mixtas en juegos de suma cero de dos personas resultó una idea asombrosa [1].

[11] España, que había perdido 0-1 con Suiza el primer partido del campeonato, acabó ganando a Paraguay 2-1.

[12] Ver, por ejemplo, http://www.elpais.com/articulo/deportes/Casillas/Gracias/Reina/ha/dicho/iba/tirar/Cardozo/elpdepfutmunart/20100703elpepudep_25/Tes#.

lado natural–, pero si siempre lo hace acabarán deteniéndole muchos lanzamientos. Tendrá mayor porcentaje de aciertos si lanza hacia la derecha del portero con cierta frecuencia. Es más, un buen lanzador debería ser capaz de mantener la incertidumbre sobre qué lado lanzará. Así que la información previa sobre uno o varios de sus lanzamientos no servirá para saber por qué lado disparará el próximo[13]. Igual que si uno apuesta todo al rojo a la ruleta porque salió rojo una, dos o trece de las últimas veces, lo puede tener “negro”.



El lanzamiento de un penalti es un genuino ejemplo de juego pierde-gana (sin empate) de movimientos simultáneos de dos jugadores con dos estrategias. Las estrategias del lanzador son tirar por la izquierda (I) o por la derecha (D) del portero –se descarta el centro–, mientras que las del portero son tirarse a su izquierda (I) o a su derecha (D). El juego es de movimientos simultáneos porque, a la velocidad que viaja el balón, cada jugador toma su decisión sin saber qué hará el oponente[14]. La valoración que hace el lanzador de cada posible resultado es la probabilidad de gol si se produce el perfil (i,j), donde i es la estrategia del lanzador y j la del portero. Obviamente las valoraciones del portero son las probabilidades complementarias.

La estrategia minimax del lanzador consiste en elegir I con la probabilidad p^* que hace que el portero sea indiferente entre tirarse a un lado o a otro. Es decir, las probabilidades esperadas de que no sea gol si elige I o si elige D deben ser iguales. La razón es clara: si la probabilidad de éxito eligiendo, por ejemplo, I fuera mayor, el portero se tiraría siempre al lado izquierdo[15]. Por simetría, el portero debe elegir I con la probabilidad q^* que consigue que la probabilidad de gol esperada sea igual si el lanzador dispara por un lado o por el otro. Es sencillo probar que la solución minimax siempre existe en el contexto del juego del penalti[16].

[13] En el mundial, de hecho, Cardozo clasificó a Paraguay para cuartos de final metiendo el último penalti de la tanda de desempate contra Japón: por la derecha. Si Cardozo es un buen lanzador, esa información más la de Reina –el paraguayo lanzó 2 de 3 por la izquierda– no permite saber de qué lado tirarse.

[14] De hecho, el árbitro debe indicar la repetición de un lanzamiento fallido si el portero se adelantó ostensiblemente al golpeo del balón.

[15] Aquí se puede ver que la estrategia minimax es “defensiva”: persigue asegurar que un adversario racional cause a su oponente el menor daño posible en el juego.

[16] Como el lanzador dispara de modo que las valoraciones esperadas de las dos estrategias del portero sean idénticas, p^* debe satisfacer

$$p^* v_2(I,I) + (1-p^*)v_2(D,I) = p^* v_2(I,D) + (1-p^*)v_2(D,D),$$

donde $v_2(i,j)$, con $i,j \in \{I,D\}$, es la probabilidad de que no sea gol para el perfil (i,j). Las valoraciones del lanzador son $v_1(i,j)= 1- v_2(i,j)$. Del mismo modo, el portero debe elegir I con la probabilidad q^* que verifica

La receta minimax del lanzador consiste, pues, en acumular el mismo porcentaje de dianas por cada lado y en ser impredecible en cada lanzamiento. Parece muy complicado desarrollar en la práctica un método de lanzamientos con esa finura, que involucra tanto pies como cabeza, tanto habilidad como estrategia. Ya se sabe, en teoría no hay diferencia entre teoría y práctica; pero en la práctica sí.

Sin embargo, los jugadores profesionales… ¡saben lanzar a lo von Neumann! Así lo comprobó un publicitado estudio hace unos años [14]. El propio Cardozo parece conocer la receta: analizando hasta 13 de sus lanzamientos en la temporada 09-10, resulta que realiza el 67% cuando lanza por la izquierda y el 70% cuando lo hace por la derecha, porcentajes quizá discretos, pero muy próximos. Si no es un gran realizador de penaltis, parece deberse más a carencias técnicas que estratégicas.

Es sorprendente que los futbolistas sean capaces de dominar una técnica tan sofisticada. Y no porque sea difícil (que lo es) imaginarlos aprendiendo minimax en las teóricas del vestuario. Tampoco los profesionales del billar necesitan aprender las leyes de la mecánica para conseguir sus impecables carambolas. Lo que resulta asombroso es la lectura en el sentido contrario: lo excelentemente bien que una teoría matemática describe una situación cotidiana tan complicada.

5. La "otra" doble hélice

La solución de von Neumann para los juegos de competición pura como el del penalti es un resultado fundamental sin el que la teoría de juegos probablemente no hubiera pasado de anécdota[17]. Sin embargo, no estaba nada claro cómo unos jugadores racionales podrían determinar su estrategia "correcta" de un modo preciso en juegos no estrictamente competitivos. Tanto es así, que von Neumann y Morgenstern no encontraron una solución general para nuestro juego del bar[18]. El problema era especialmente sustancial porque las situaciones típicas en economía o el mundo social no son no competitivas, sino que contienen elementos de cooperación además de conflicto, como el juego del bar.

La opinión generalizada hoy acerca del estado de las cosas antes de 1950 es que la teoría de juegos habría quedado arrinconada en el trastero de la casa de la ciencia si no se hubiera hallado una solución para los juegos no competitivos con N jugadores. Eso es precisamente lo que Nash consiguió en 1950 en su tesis, de veintisiete páginas. Las seis primeras contienen el resultado fundamental: la noción de solución y el teorema de existencia[19].

La idea de solución de Nash –lo que llamó *punto de equilibrio*– consiste en un vector de estrategias que coordina las acciones racionales de los jugadores de un modo estable o auto-reforzado. Un perfil es un equilibrio si está formado por estrategias que se contrarrestan mutuamente, es decir, cada jugador elige la suya porque le proporciona la mejor valoración contra las estrategias del resto[20]. Así,

---

$$q^* v_1(I,I) + (1-q^*)v_1(I,D) = q^* v_1(D,I) + (1-q^*)v_1(D,D)\,,$$

es decir, que hace que la probabilidad de gol esperada sea igual lanzando por la izquierda que por la derecha. Como, lógicamente, se tiene que $v_k(i,i)<v_k(i,j)$, para $i,j\in\{I,D\}$, $i\neq j$, $k=1,2$, se puede comprobar que las anteriores ecuaciones determinan probabilidades p^*,q^* bien definidas.

[17] El propio von Neumann consideraba que el teorema minimax era de vital importancia. En 1953 escribía: *"Tal como yo lo veo, no podría existir la teoría de juegos sin este teorema […] Creía que no había nada que mereciera la pena publicar hasta que no demostrara el teorema minimax"* [15].

[18] La idea para resolver ese tipo de bucle de expectativas mutuas la había obtenido Augustin Cournot en 1838 para un problema específico. Parece ser que Morgenstern conocía el resultado de Cournot, pero no se dio cuenta de que podía romper los bucles perversos de razonamiento de los juegos.

[19] El resultado central: la noción de solución y la prueba de la existencia se habían completado antes de noviembre de 1949 y apareció en un artículo (de una página) en los *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. Según Harold Kuhn, el núcleo de la tesis está en las seis primeras y las seis últimas páginas y el resto del manuscrito –a doble espacio– es "relleno" [7].

[20] "Un punto de equilibrio es una N-tupla de estrategias que se auto–contrarresta" [13]. Un perfil de estrategias (mixtas) $\boldsymbol{m}$= $(m_1,\ldots,m_N)$ es un vector del espacio $\boldsymbol{S}=S_1\times S_2\times\ldots\times S_N$ producto de los espacios de estrategias S_i de cada jugador. Si se

un equilibrio de Nash es estable en el sentido de que *ningún* jugador (racional) cambiará su estrategia de equilibrio si los demás mantienen la suya, porque haciéndolo sólo conseguirá empeorar.

Es difícil concebir una solución de un juego no competitivo que no sea un equilibrio de Nash. De hecho, una vez propuesto un equilibrio como solución del juego, es imposible que ningún jugador racional cambie la propuesta modificando su estrategia. Excepto si establece acuerdos laterales con otros jugadores. En la teoría de juegos no cooperativos, tales acuerdos no son posibles. Si los jugadores son racionales, tienen información suficiente sobre todos los elementos del juego, y el juego tiene un único equilibrio de Nash, el análisis introspectivo de la situación por parte de cada jugador es suficiente para que se produzca el equilibrio como solución[21].

Por muy interesante que resulte, la idea de Nash no hubiera avanzado la teoría si, como la de von Neumann, sólo fuera aplicable a una clase reducida de juegos. El golpe definitivo que abrió brecha para una teoría general fue la demostración de Nash de que todos los juegos no cooperativos de cualquier número de jugadores, cada uno con cualquier número (finito) de estrategias, tiene al menos un punto de equilibrio. El teorema de Nash se puede demostrar como consecuencia directa del teorema de punto fijo de Kakutani de 1941[22]. Una vez más –como, por ejemplo, cuando Kepler no tuvo que inventar la elipse para identificar las curvas que sus datos describían como órbitas planetarias– un concepto matemático abstracto –topológico en el caso de Nash– hace de llave para resolver un problema aplicado.

La idea del equilibrio de Nash pareció demasiado simple como para resultar interesante o incluso novedosa[23]. Es famoso el episodio de la entrevista en que Nash le explica su idea a von Neumann, y éste le responde: *"Eso es una trivialidad, no es más que un teorema de punto fijo"*[24]. La frase parece reflejar la diferente escala de valor que las matemáticas usan en relación con otras ciencias. Así, el matemático John Milnor –que conoció a Nash en Princeton– explica que el resultado de Nash es, para algunos, el menor de sus logros, *"una aplicación ingeniosa pero no sorprendente de métodos bien conocidos"*[25]. Al matemático y economista David Gale –compañero de Nash en Princeton– sí le resultó *"enormemente hermoso"* el contenido matemático de la tesis de Nash, que de inmediato le pareció sólida aunque *"no que merecería un Nobel"*[26].

Como es bien sabido, Gale se equivocó en eso. En 1994, cuarenta y cuatro años después de su artículo fundamental, Nash recibió el Premio Nobel de Economía, compartido con el matemático

---

define la *correspondencia de contrarresto* $\boldsymbol{R}\colon \boldsymbol{S} \to 2^{\boldsymbol{S}}$ (o de "mejor respuesta") de modo que un vector en $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{m})$ está formado por las estrategias de cada jugador que le dan el valor más alto frente al vector de estrategias del resto en el perfil $\boldsymbol{m}$, un equilibrio de Nash cumple $\boldsymbol{m}^* \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{m}^*)$, es decir, es un punto fijo de $\boldsymbol{R}$.

[21] Si un juego tiene varios equilibrios, la coordinación para seleccionar un equilibrio sí resulta un problema importante. Más adelante se contempla este problema parcialmente.

[22] Esa es la demostración de Nash en su artículo [13]. El conjunto de perfiles $\boldsymbol{S}$ (ver nota 20) es un compacto, convexo no vacío de algún espacio $\mathbb{R}^n$ y la correspondencia de mejores respuestas $\boldsymbol{R}$ tiene grafo cerrado y $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{m})$ es convexo no vacío para cada $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{S}$. Ese es el escenario del teorema de Kakutani, que concluye que $\boldsymbol{R}$ tiene al menos un punto fijo.

[23] El mismo Nash consideró la posibilidad de abandonar el tema de su tesis por otro de geometría algebraica, preocupado porque el Departamento de Matemáticas de Princeton no aceptara su trabajo sobre juegos. Tucker, su director, acabó convenciéndole de que concluyera su tesis sobre juegos y de que publicara cuanto antes su teorema [12]. Sobre la novedad de la idea de Nash, es cierto que ya había sido aplicada por Cournot en 1838 para analizar la competencia estratégica entre las dos únicas empresas que fabrican un mismo producto, pero parece claro que Nash desconocía el trabajo de Cournot [7].

[24] Ver, por ejemplo, Poundstone [15] o Nasar [12].

[25] Milnor [8] aclara antes que *"los matemáticos puros tienden a juzgar cualquier trabajo en las ciencias matemáticas por su profundidad matemática y en la medida en que introducen nuevas ideas y métodos matemáticos o resuelven problemas que llevan abiertos mucho tiempo".* En la línea de Kemeny expresada anteriormente, también reconoce en otro lugar que *"es notoriamente difícil aplicar métodos matemáticos precisos en las ciencias sociales, sin embargo las ideas de la tesis de Nash son sencillas y rigurosas y proporcionan un respaldo firme a […] cualquier situación en que humanos o no humanos se enfrentan a competencia o conflicto"* [8].

[26] Ver Nasar [12].

Reinhard Selten y el economista John Harsanyi[27]. Por primera vez entonces, en 93 años de historia de los Premios Nobel, un premio se concedía por un trabajo hecho exclusivamente en matemáticas puras[28].

Gracias a Nash, la teoría de juegos destaca como la teoría unificadora de las ciencias sociales. La trascendencia de la teoría de Nash en la ciencia social está tan establecida como la gravitación de Newton o la selección natural de Darwin en las ciencias naturales. La afirmación más definitiva en ese sentido es de Roger Myerson, economista y Premio Nobel de Economía en 2007, que escribió en 1999:

> *"La teoría de Nash de los juegos no cooperativos debería reconocerse hoy como uno de los avances intelectuales más excepcionales del siglo XX. La formulación del equilibrio de Nash ha tenido un impacto fundamental y penetrante en economía y las ciencias sociales, comparable al del descubrimiento de la doble hélice del DNA en las ciencias biológicas."*

6. Nash en el bar

La situación del bar que abría este artículo aún está por resolver. Es un juego con N jugadores, cada uno con dos estrategias, de modo que se encuentra entre los problemas para los que el teorema de Nash garantiza solución. Las propuestas "todos R" o "todos M" no son equilibrios: en ambos casos, un jugador puede mejorar si cambia de estrategia[29]. En el primero, cualquiera puede mejorar –pasando de charlar solo a charlar con una morena– cambiando de R a M. En el segundo, uno puede mejorar –charlando con la rubia en lugar de con una morena– eligiendo R en lugar de M. Del mismo modo se comprueba que cualquier perfil en que más de uno elige R no es un equilibrio.

Sólo quedan los perfiles "uno R; los otros M". En esa situación, uno sólo empeora si cambia a M y cualquier otro también empeora si se decide a jugar R –y ninguno más cambia– puesto que, compitiendo con uno por la rubia, acabará solo en la barra. Por tanto, ningún jugador tiene incentivo a cambiar de estrategia: esa es la configuración de estrategias de un equilibrio de Nash.

De modo que la teoría de Nash permite hacer una previsión sobre qué resultara de la interacción psicológica de los chicos jugando a ligar en el bar. Bajo los supuestos sobre las preferencias, racionalidad, e información ya explicados, la única previsión plausible es organizarse de modo que uno se acerque a la rubia y cada uno de los otros a una morena[30].

7. Selten pondría orden

He ahí la solución del juego del bar. Todos los jugadores han hecho su análisis y han llegado a la solución del equilibrio de Nash: uno irá con la rubia y el resto con morenas. Así que problema

[27] *"Por su análisis pionero del equilibrio en la teoría de juegos no cooperativos."* Ver Nobelprize.org:*The Prize in Economics 1994 - Press Release,* http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/press.html.

[28] Ver Casti [2], que elabora sobre cinco grandes teorías matemáticas del siglo XX. El primer capítulo está dedicado a la Teoría de Juegos de von Neumann y Nash.

[29] Estas dos son las propuestas antagónicas que se hacen en la escena referida de la película *A beautiful mind:* el rubio Hansen propone "todos R" mientras que Nash –interpretado por Russell Crowe– defiende "todos M" como "solución". Ninguna de las dos es solución en el sentido de Nash.

[30] Esos perfiles tienen además la atractiva propiedad de realizar "el mejor resultado para el grupo", en el sentido de que ninguno puede mejorar su situación si no es a costa de empeorar a algún otro. En economía, esa noción de óptimo social es básica para evaluar la eficiencia agregada de una asignación. En la película *A beautiful mind,* Crowe/Nash propone el perfil "todos M" como uno en que cada uno hace "lo mejor para sí y para el grupo" en contraposición a "todos R", que interpreta como que cada uno hace "lo mejor para sí" pero el resultado es malo para el grupo. Es claro que "todos M" es más eficiente socialmente que "todos R". Pero "todos M" tampoco es eficiente. Los únicos perfiles en que cada uno "hace lo mejor para sí" (racionalmente) son los equilibrios de Nash "uno R; los otros M". Además producen lo "mejor para el grupo" (en el sentido de eficiencia anterior). En el contexto de la película, se podrían llamar equilibrios de Smith, de modo que la afirmación de Crowe/Nash de que "Smith se equivocaba" no se sostiene. Ver Rey [19] para los detalles de esta discusión.

resuelto. O más bien no. Ciertamente se han descartado muchos perfiles como solución, pero la configuración propuesta no corresponde a una única solución. Puesto que hay N jugadores, hay N equilibrios diferentes. Así que, ¿quién es el que va por la rubia?

En una situación de multiplicidad de equilibrios, aparece un problema de selección de *una* solución. Esa fue una cuestión importante en el área posterior al trabajo de Nash. De hecho, el Premio Nobel en economía concedido a Reinhard Selten en 1994 se debe a su trabajo en la selección de equilibrios de Nash en contextos en que existen movimientos secuenciales[31]. Si se introduce un orden en la decisión de los jugadores, la idea de Selten permite resolver el problema de selección de equilibrio. Para ello, basta con que uno de los chicos haga primero su movimiento –eligiendo R o M– y los otros muevan después simultáneamente, conociendo la elección del primero. Así se obtiene una única solución racional, en el sentido de Selten: "el primero en mover elige R y los demás eligen M"[32].

Bien, la solución de Nash-Selten[33] resuelve el problema de selección… ¡pero de un juego distinto al juego del bar original! Si se introduce orden en la elección de los jugadores, el juego cambia necesariamente y, posiblemente, su solución[34]. En nuestro juego del bar original, cada chico toma su decisión sin saber qué hará el resto. Es un juego de movimientos simultáneos, como el del lanzamiento del penalti[35]. La idea de Selten, por tanto, no permite distinguir entre las N soluciones.

8. La selección "natural" de Schelling

En el juego del bar original, sin elecciones secuenciales, ¿es aún posible seleccionar un equilibrio? Resulta que es sencillo con la ayuda de George Clooney. Supongamos que entre los N jugadores del bar se encuentra el célebre Clooney. Entonces la previsión del juego es el equilibrio "Clooney R; los otros M". ¿Por qué? Bien, pues porque es evidente que ese equilibrio sobresale respecto de los otros $N–1$. Con la información de que Clooney es uno de ellos, los jugadores son capaces de coordinarse espontáneamente eligiendo una solución, que además es eficiente en el sentido de que ninguno puede mejorar su situación sin empeorar a otro[36].

Un equilibrio que sobresale entre varios por razones que resultan obvias, bien sean culturales, históricas o de otro tipo se llama un *punto focal* o *de Schelling*. La propuso el economista Thomas Schelling como solución de los problemas sociales. Schelling fue pionero en aplicar la teoría matemática de juegos para analizar de manera efectiva situaciones reales de conflicto o coordinación. Por eso fue galardonado con el Premio Nobel de Economía en 2005[37]. El ejemplo clásico de Schelling

---

[31] Sobre la concesión del Premio a Selten en la ceremonia del Nobel de 1994 se menciona: *"Un problema conectado con el concepto del equilibrio de Nash es que puede haber varios equilibrios en juegos no cooperativos. Puede resultar difícil –tanto para los jugadores como para un analista externo– predecir el resultado. Reinhard Selten –a través de sus conceptos de "perfección"– ha establecido los fundamentos de un programa de investigación que intenta excluir equilibrios improbables o irrazonables".*

[32] La solución de Selten está basada en el concepto de "racionalidad secuencial": el primero en mover anticipa los movimientos racionales de los jugadores que mueven después y mueve racionalmente R con esa información: es claro que los demás elegirán M después que el primero elige R; así los segundos hacen todos un movimiento racional mientras que el primero obtiene su valor máximo. Para implementar la solución en la práctica, se puede incluir en el juego un movimiento inicial del azar en que se sortea quién mueve primero.

[33] La solución de Selten es siempre un equilibrio de Nash, de hecho se conoce como "equilibrio de Nash perfecto en subjuegos".

[34] Basta pensar en el juego de pares y nones si se introduce orden y un jugador saca su número después de haber observado la jugada del primero.

[35] Hay que observar que no se trata de que los chicos del bar "muevan" a la vez (por rubia o morena). Con o sin movimientos observables, la fricción estratégica del juego tiene lugar en sus cabezas y el análisis del juego es pertinente como resultado de una introspección racional. Del mismo modo que, en el juego del penalti, los jugadores razonan mentalmente su decisión sobre qué lado elegirán antes de hacerlo. Así parece que sucede en realidad.

[36] Ver la discusión sobre eficiencia de la nota 30.

[37] En la nota de prensa con motivo del Premio 2005 se explica: *"¿Por qué algunos grupos de individuos, organizaciones y países promueven con éxito la cooperación mientras otros sufren conflictos? El trabajo de Robert Aumann y Thomas Schelling ha establecido la teoría de juegos –o la teoría de la decisión interaciva– como el enfoque dominante para responder esa*

consiste en dos personas que han quedado en encontrarse un día concreto por la mañana en el centro de una gran ciudad –pongamos Madrid–, pero no han podido concretar más y no pueden comunicarse. Se trata de un problema de coordinación similar al del bar. Deben seleccionar uno entre los innumerables equilibrios de Nash: cualquier hora y lugar del centro. El punto focal podría ser "las 12h y bajo el reloj de la Puerta del Sol".

9. El dilema de las gallinas

En un grupo de amigos en que alguno puede hacer el rol de Clooney, existe un punto focal que resuelve el problema del bar. Si no hay nadie que haga de Clooney, de nuevo resurge la cuestión de elección del equilibrio. Si todos los amigos se consideran iguales, no es posible seleccionar uno[38]. Todos son conscientes de que la solución Nash consiste en que uno y sólo uno se acerque a la rubia. Pero ante la imposibilidad de decidir quién, cabe la posibilidad de que todos lo hagan, que es el peor resultado para todos. Es natural entonces que los amigos consideren acordar explícita o implícitamente la solución de compromiso "todos M". El dilema con esa solución de compromiso es que todos tienen incentivos a romper el acuerdo, pensando en que los demás lo respetarán[39]. Si todos actúan racionalmente, el resultado será el pésimo: "todos R".

El dilema plantea un retorcido nudo que parece difícil deshacer. En ausencia de puntos focales, la multiplicidad de equilibrios en una situación simétrica como la del bar puede conducir al peor resultado posible. Tanto en la solución de compromiso o en cualquier equilibrio de Nash, todos los jugadores están mejor que en el resultado pésimo "todos R". Sin embargo, no es fácil argumentar cómo jugadores racionales podrían acordar una solución mejor.

Ese dilema de los chicos del bar es una versión para N jugadores del "¡Gallina!", un modelo clásico de conflicto entre dos ideado por Bertrand Russell para explicar los peligros de la tensión nuclear en el periodo de la guerra fría del siglo XX. La forma del juego más popular consiste en dos conductores que dirigen sus vehículos sobre la misma línea recta en sentidos opuestos hacia la colisión. El que se desvía antes para evitar el choque es el "gallina" mientras el oponente queda como ganador. Evidentemente el peor resultado se produce si ninguno se desvía, mientras que la solución de compromiso es que ambos se retiren de la línea. De nuevo, sin punto focal para seleccionar uno de los dos equilibrios del "¡Gallina!", la solución de compromiso lleva al desastre si los dos jugadores responden –racionalmente– a sus incentivos. Dado el calibre del riesgo de la situación, la recomendación de Russell es no participar[40]. Si se acaba entrando en el juego, para salir del atolladero parece imprescindible construir un punto focal, quizá el que mantenga mejor el *statu quo* previo[41].

---

antiquísima cuestión". El trabajo de Aumann –matemático– analiza formalmente la aparición de cooperación en situaciones sin incentivos para ello a corto plazo. El de Schelling concierne a situaciones de conflicto y coordinación, en concreto la resolución y prevención de conflictos bélicos o armamentísticos. El trabajo de Schelling supuso la expansión de las aplicaciones de la teoría de juegos, a la que considera el armazón unificador de las ciencias sociales.

[38] Obsérvese que no es necesario que los amigos sean en ningún sentido objetivo "parecidos"; basta que se consideren así entre ellos.

[39] Se observa así una atractiva propiedad del equilibrio de Nash: si se acuerda jugar un equilibrio, no es necesario articular ningún mecanismo de vigilancia, puesto que nadie tiene incentivo a romper el acuerdo. Cualquier acuerdo de jugar un perfil que no sea un equilibrio tiene implícito el riesgo de que se rompa: un jugador racional cambiará la estrategia acordada respondiendo a sus incentivos.

[40] En el libro *Common Sense and Nuclear Warfare* (1959) Russell describe la versión estándar del juego y su aplicación al dilema nuclear soviético–norteamericano. Russell escribe que *"cuando juegan al '¡Gallina!' eminentes jefes de Estado, los cuales arriesgan no sólo sus vidas sino las de muchos cientos de millones de seres humanos, se considera que demuestran una gran sabiduría y un gran valor y sólo tienen la culpa los gobernantes del otro bando. Por supuesto, esto son tonterías. Ambos bandos son culpables de participar en un juego tan increíblemente peligroso como éste. […] Llegará un momento en que ninguno de los bandos podrá soportar que le griten con burla '¡Gallina!' desde el otro. Entonces los dirigentes de los dos lados sumirán al mundo en la destrucción".* Un relato detallado del '¡Gallina!' y el papel de Russell en la crisis nuclear de los años de la guerra fría se puede ver en Poundstone [15].

[41] Así parece que sucedió en la crisis de los misiles cubanos de 1962 que tuvo al mundo en vilo: la Unión Soviética acabó cediendo a las exigencias de los Estados Unidos –desmontando los misiles que habían desplegado en Cuba–, recuperando así

El juego del "¡Gallina!" –increíblemente peligroso, en palabras de Russell– ilustra excelentemente la tensión entre el interés individual y el compromiso para el bien colectivo en situaciones de conflicto en que los contendientes tienen fuerzas similares. Sin puntos focales, seguir los incentivos puede derivar en un resultado catastrófico.

10. La vida posible en la jungla social

El juego del bar –aparentemente trivial– permite vislumbrar algunos de los problemas que, de un modo u otro, deben resolverse para que la vida en sociedad sea posible. Innumerables situaciones sociales se resuelven cotidianamente sin riesgo de "catástrofe" –como el del "¡Gallina!"– o simplemente sin malestar social.

Esas soluciones cotidianas pueden ser muy diferentes en distintas sociedades o culturas. Por ejemplo, la solución del tráfico entre los vehículos que confluyen en una rotonda o un cruce difiere en muchas zonas del mundo, como sabe cualquiera que haya conducido en –pongamos– Nápoles y California[42]. Razones culturales o de otro tipo seleccionan un punto focal diferente en cada caso.

La vida en la jungla social es posible gracias a que los individuos están entrenados por sus entornos sociales para comportarse según soluciones Nash-Schelling[43]. Sin ellas, la necesidad de tener que seleccionar entre una multiplicidad de equilibrios puede conllevar la posibilidad de catástrofe social mientras los individuos respondan a incentivos. El desafío de la ciencia social es entender esas respuestas y cómo se pueden articular para que la vida social en la Tierra sea eficiente o, cuando menos, posible.

Referencias

[1] ^ K. Arrow: Introductory remarks on the history of Game Theory. *Games and Economic Behavior* 45 (2003), 15-18.

[2] ^ J.L. Casti: *Five golden rules. Great theories of the 20th century mathematics and why they matter.* John Wiley & Sons, 1996.

[3] ^ P.R. Halmos: The legend of John Von Neumann. *American Mathematical Monthly* 80, no. 4 (1973), 382-394.

[4] C.A. Holt, A.E. Roth: The Nash equilibrium: A perspective*.* *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 101, no. 12 (2004), 3999-4002.

[5] J.G. Kemeny: *The social science call on mathematics*. En *The mathematical sciences – A collection of essays*, edited by the National Research Council Committee on Support of Research in the Mathematical Sciences (COSRIMS). The MIT Press, 1969.

[6] ^ L. Klein: *The role of mathematics in economics* En *The mathematical sciences – A collection of essays*, edited by the National Research Council Committee on Support of

el *statu quo* previo a la crisis. Aunque evidentemente, después de jugar al "¡Gallina!" y ceder, es difícil pensar en que se puede recuperar intacto el estado previo de las cosas.

[42] Los conductores que llegan a la intersección eligen entre seguir o detenerse a esperar un turno. Cualquier solución que evite colisiones se puede considerar un equilibrio de Nash. Es claro que la selección del equilibrio es muy diferente entre países o ciudades.

[43] Esas soluciones son típicamente las *normas sociales*, que pueden resultar de la regulación por algún poder del Estado o establecerse a partir de la tradición o los usos y costumbres. Según Binmore (1998), las que nos son más importantes no han sido inventadas por cuerpos legislativos sino que son exclusivamente el producto de la evolución social y biológica. Binmore (1998) propone una teoría del contrato social basada en la teoría de juegos: el contrato social se consigue gracias a *"un mecanismo siempre disponible con el propósito de coordinarse en un* equilibrio *en el 'juego de la vida'"*, es decir, en una solución Nash-Schelling.

Research in the Mathematical Sciences (COSRIMS). The MIT Press, 1969.

[7] a b H. Kuhn (ed.): Nobel seminar: The work of John Nash in game theory. *Journal of Economic Theory* 69 (1994), 153-185.

[8] a b J. Milnor: John Nash and "A beautiful mind*". Notices of the American Mathematical Society* 45 (10) (1998),1329-1332.

[9] R. Myerson: Nash equilibrium and the history of economic theory. *Journal of Economic Literature* 36 (1999), 1067-1082.

[10] J. Milnor: A Nobel Prize for John Nash. *The Mathematical Intelligencer* 17, no. 3 (1995), 11-17.

[11] ^ P. Mirowski: The when, the how and the why of mathematical expression in the history of economic analysis. *Journal of Economic Perspectives* 5 (1991), 145-157.

[12] a b c S. Nasar: *Una mente prodigiosa*. Mondadori, 2001.

[13] a b J.F. Nash: Equilibrium points in N-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 36 (1950), 48-49.

[14] ^ I. Palacios-Huerta: Professionals play minimax. *Review of Economic Studies* 70 (2003), 35-415.

[15] a b c d W. Poundstone: *El dilema del prisionero: John von Neumann, la teoría de juegos y la bomba.* Alianza Editorial, 1992.

[16] Nobelprize.org: *The Prize in Economics 1994 - Press Release,* http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/press.html.

[17] Nobelprize.org: *The Prize in Economics 1994 - Presentation Speech,* http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/presentation-speech.html.

[18] Nobelprize.org: *The Prize in Economics 2005 - Press Release,* http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2005/press.html.

[19] ^ J.M. Rey: If we all go for the blonde. *Plus Magazine* 47, 2008. [Disponible en http://plus.maths.org/issue47/features/rey/index.html].

[20] E.R. Weintraub (ed.): *Towards a history of game theory.* Annual supplement to volume 24 of History of Political Economy. Duke University Press, Durham,1992.

Sobre el autor

José Manuel Rey es doctor en Matemáticas y profesor titular en el Departamento de Análisis Económico de la Universidad Complutense de Madrid. Ha obtenido, en las dos últimas ediciones (2008 y 2009), el premio *Plus New Writers Award* concedido por la revista *Plus,* de la Universidad de Cambridge.

Los dibujos que ilustran el artículo son de **Gianni Peg,** conocido dibujante y autor italiano que vive en Roma.